# Polynômes d'interpolation de LAGRANGE

Le comte Joseph Louis LAGRANGE, mathématicien français est né en 1736 et est mort en 1813 .

On cherche, dans ce paragraphe, une expression du polynôme de degré au plus $n$ prenant les mêmes valeurs qu'une fonction donnée en $n+1$ points deux à deux distincts donnés, puis à étudier l'erreur commise en cherchant à la minimiser .

## 1) Définition des polynômes $L_k$

Soit $n$ un entier naturel puis $x_0$, $x_1, \ldots$, $x_n$, $(n+1)$ complexes deux à deux distincts.
On cherche $(n+1)$ polynômes $L_0, \ldots$, $L_n$, tous de degré au plus $n$, vérifiant les égalités :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(x_j) = \delta_{i,j},$$

(où $\delta_{i,j}$ est le symbole de KRONECKER défini par $\delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$ ).

Soit $i$ un entier naturel élément de $[\![0,n]\!]$ donné. Le polynôme $L_i$ est de degré au plus $n$ et admet les $n$ complexes deux à deux distincts $x_j$, $j \neq i$, pour racines. Par suite, nécessairement, il existe une constante $C$ telle que

$$L_i = C \prod_{j \neq i} (X - x_j).$$

L'égalité $L_i(x_i) = 1$ fournit alors $C = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$ et donc nécessairement

$$L_i = \prod_{j \neq i} \left( \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

Réciproquement, si pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \left( \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$ alors $L_i$ est bien défini car les $x_j$ sont deux à deux distincts, de degré $n$ exactement et enfin les polynômes $L_i$ vérifient clairement les égalités de dualité : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Soient $n$ un entier naturel puis $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$, $(n+1)$ complexes deux à deux distincts donnés.
Il existe une et une seule famille, notée $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$, de $(n+1)$ polynômes de degré au plus $n$ vérifiant :
$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
De plus : $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \left( \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$.

## 2) La famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$

Les $L_k$ sont tous dans $\mathbb{C}_n[X]$. Montrons que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \lambda_j = 0.$$

Donc la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$. Comme $\text{card}(L_k)_{0 \leq k \leq n} = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty$, la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

La famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

 

## 3) Base duale de la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$

Soient $n$ un entier naturel puis $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$, $(n+1)$ complexes deux à deux distincts. Pour $j \in [\![0,n]\!]$ donné, on note $\varphi_j$ la forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \varphi_j(P) = P(x_j)\ (\varphi_j \text{ est « l'évaluation en } x_j \text{ »}).$$

Les égalités $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ s'écrivent encore

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!],\ \varphi_j(L_i) = \delta_{i,j} \text{ ou aussi } < L_i, \varphi_j >= \delta_{i,j}.$$

ce qui signifie, puisque $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie, que la famille $(\varphi_j)_{0\leq j\leq n}$ est la base duale de la famille $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ (et en particulier une base du dual de $\mathbb{C}_n[X]$).

La base duale de la base $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est la famille de formes linéaires $(\varphi_j)_{0\leq j\leq n}$ définies par :
$\forall j \in [\![0,n]\!],\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \varphi_j(P) = P(x_j)$.

## 4) Coordonnées d'un polynôme de degré au plus $n$ dans la base $(L_k)_{0\leq k\leq n}$

En conservant les notations précédentes , on se donne de plus un $(n+1)$-uplet quelconque $(y_0, \ldots, y_n)$ de nombres complexes. On cherche les polynômes $P$ de degré au plus $n$ vérifiant

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ P(x_j) = y_j.$$

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Notons $(\lambda_0, ..., \lambda_n)$ les coordonnées de $P$ dans la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ de $\mathbb{C}_n[X]$. On a donc $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$.
Maintenant, pour $j$ élément de $[\![0,n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j.$$

Ainsi,

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ P(x_j) = y_j \Leftrightarrow \forall j \in [\![0,n]\!],\ \lambda_j = y_j.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i,}$$

et aussi que

Soient $n$ un entier naturel, $x_0$, ..., $x_n$, $(n+1)$ complexes deux à deux distincts et $y_0$, ..., $y_n$, $(n+1)$ complexes.
Il existe un et un seul polynôme $P$ de degré au plus $n$ vérifiant $\forall j \in [\![0,n]\!],\ P(x_j) = y_j$ à savoir

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right).$$

## 5) Polynômes de degré au plus 2 prenant des valeurs données en des points donnés

• Cas où $n = 1$. Soient $x_0$ et $x_1$ deux complexes distincts et soient $y_0$ et $y_1$ deux complexes. Le polynôme de degré au plus 1 qui vérifie $P(x_0) = y_0$ et $P(x_1) = y_1$ est

$$P = y_0 \frac{X - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{X - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(X - x_0) + y_0.$$

 

• Cas où $n = 2$. Soient $x_0$, $x_1$ et $x_2$ trois complexes deux à deux distincts et soient $y_0$, $y_1$ et $y_2$ trois complexes. Le polynôme de degré au plus 2 qui vérifie $P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$ et $P(x_2) = y_2$ est

$$P = y_0\frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\frac{(X - x_0)(X - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(X - x_0)(X - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\deg(P) = 2 &\Leftrightarrow y_0\frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1\frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \neq 0\\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)y_0 + (x_2 - x_0)y_1 + (x_0 - x_1)y_2 \neq 0 \Leftrightarrow (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (y_2 - y_0)(x_1 - x_0) \neq 0\\ &\Leftrightarrow \text{les trois points } (x_0, y_0),\ (x_1 y_1) \text{ et } (x_2, y_2) \text{ ne sont pas alignés.}\end{aligned}$$

On a presque démontré que :

par trois points non alignés, il passe une parabole et une seule.

## 6) Matrice de passage de la base des polynômes de Lagrange à la base canonique

On applique le 4) au cas particulier où le polynôme $P$ est l'un des éléments de la base canonique $(X^j)_{0\leq j\leq n}$ de $\mathbb{C}_n[X]$. On obtient $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ et plus généralement,

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!],\ X^j = \sum_{i=0}^{n} x_i^j L_i.}$$

Ainsi la matrice de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est la matrice $(x_i^j)_{0\leq i,j\leq n}$. On reconnait la matrice de Vandermonde des $x_i$, $i \in [\![0, n]\!]$.

La matrice de passage de la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ à la base $(X^j)_{0\leq j\leq n}$ est la matrice de Vandermonde $(x_i^j)_{0\leq i,j\leq n}$ associée à la famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$.

## 7) Polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction en $(n + 1)$ points et estimation de l'erreur

D'après 4) :

Soit $n$ un entier naturel. Soient $x_0$, ..., $x_n$, $(n + 1)$ réels deux à deux distincts d'un segment $[a, b]$ et $f$ une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Il existe un et un seul polynôme de degré au plus $n$ vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)$ à savoir

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{j\neq i}\left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right).$$

On note dorénavant $L_{f,n}$ le polynôme précédent et on étudie l'erreur commise $f(x) - L_{f,n}(x)$ pour $x$ élément de $[a, b]$ quand $f$ est une fonction de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$.

Soit $x$ un réel **fixé** de $[a, b]$ distinct des $x_i$. On note $N$ le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$. Pour $t$ élément de $[a, b]$, on considère

$$\varphi(t) = f(t) - L_{f,n}(t) - A \times N(t) \text{ où } A \text{ est choisi de sorte que } \varphi(x) = 0,$$

(ce qui est possible puisque $x$ est distinct des $x_i$ et donc $N(x) \neq 0$).

Puisque $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $L_{f,n}$ et $N$ sont des polynômes, $\varphi$ est encore de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$. Maintenant, $\varphi$ s'annule en les $(n + 2)$ réels deux à deux distincts $x$, $x_0$,..., $x_n$ de $[a, b]$ (puisque $\forall i \in [\![0, n]\!],\ f(x_i) = L_{f,n}(x_i)$ et que $N(x_i) = 0$) et est de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$.

 

Le théorème de ROLLE montre alors que $\varphi'$ s'annule en au moins $(n+1)$ réels deux à deux distincts de $]a,b[$ (une fois dans chacun des $(n+1)$ intervalles ouverts définis par $x$ et les $x_i$). En réitérant ce raisonnement, pour tout entier $k$ élément de $[\![0, n+1]\!]$, $\varphi^{(k)}$ s'annule en $(n+2-k)$ réels deux à deux distincts de $]a,b[$. En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en au moins un réel de $]a,b[$ noté $c_x$.
Maintenant, puisque $L_{f,n}$ est de degré au plus $n$ et que $N$ est unitaire de degré $(n+1)$,

$$\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - A \times (n+1)!$$

et l'égalité $\varphi^{(n+1)}(c_x) = 0$ s'écrit encore

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}.$$

En explicitant l'égalité $\varphi(x) = 0$, on a montré que :

$$\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}\ \exists c_x \in ]a,b[/\ f(x) - Lf_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} N(x).$$

Ce résultat reste clair si $x$ est l'un des $x_i$ car, dans ce cas, $f(x) - L_{f,n}(x)$ et $N(x)$ sont nuls de sorte que n'importe réel $c_x$ de $]a,b[$ convient. Donc :

Soit $n$ un entier naturel. Soient $x_0, \ldots, x_n$, $(n+1)$ réels deux à deux distincts d'un segment $[a,b]$ et $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in [a,b] \setminus \{x_0, ..., x_n\}\ \exists c_x \in ]a,b[/\ f(x) - Lf_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} N(x) \text{ où } N(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i).$$

## 8) Convergence de « la » suite des polynômes de LAGRANGE

On peut par exemple choisir pour la famille $(x_i)$ une subdivision à pas constants du segment $[a,b]$. Dans ce cas, quand $n$ est grand $f$ et $L_{f,n}$ prennent les mêmes valeurs en « beaucoup »de points « uniformément répartis »de l'intervalle $[a,b]$. On est donc peut-être en droit d'espérer que les différences $f(x) - L_{f,n}(x)$ soient uniformément petites quand $n$ est grand ou au moins que à $x$ donné, la différence $f(x) - L_{f,n}(x)$ soit petite quand $n$ est grand.

Ceci est malheureusement faux en général. Le sujet « Saint-Cyr 1993 Mathématiques 1 » analyse ce problème. Dans la partie II, on y étudie un exemple où « la suite des polynômes d'interpolation converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$ » et en III, on étudie un exemple où « la suite des polynômes d'interpolation ne converge même pas simplement vers $f$ sur $[a,b]$ ».

## 9) Algorithme de calcul de $L_{f,n}$

Le même problème (Saint-Cyr 1993 Mathématiques 1) propose en partie IV un algorithme classique de calcul des polynômes de LAGRANGE.

 